05

Lógica proposicional: Leis de De Morgan

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Fórmula restrita

Definição: Dizemos que uma fórmula é uma *fórmula restrita* se ela apresenta apenas os conectivos lógicos ¬, & e ∨.

Exemplo: $(\neg p \vee q)\ \&\ r$

Resultado 1: Seja A uma fórmula restrita. Considere A_0 a fórmula obtida de A intercambiando os conectivos & e ∨ e substituindo cada variável proposicional pela sua negação.

Então, A_0 é logicamente equivalente a $\neg A$.

Exemplo:

$$A = \big(p \,\&\, (\neg q)\big) \vee (r)$$
$$A_0 = \Big((\neg p) \vee \big(\neg(\neg q)\big)\Big) \,\&\, (\neg r)$$

O teorema diz que A_0 é logicamente equivalente a $(\neg A)$.

Resultado 1: Seja A uma fórmula restrita. Considere A_0 a fórmula obtida de A intercambiando os conectivos & e ∨ e substituindo cada variável proposicional pela sua negação. Então, A_0 é logicamente equivalente a $(\neg A)$.

Demonstração:

Seja A uma fórmula restrita. A demonstração é por indução no número de conectivos que aparecem em A.

Vamos mostrar que para cada número natural n, toda fórmula restrita com n conectivos satisfaz o resultado.

Caso base: $n = 0$ (a fórmula A não possui conectivos).

Nesse caso, A é simplesmente uma variável proposicional, digamos, $A = p$.

Logo, A_0 é simplesmente a fórmula $\neg p$.

É claro que A_0 é logicamente equivalente a $\neg A$.

Resultado 1: Seja A uma fórmula restrita. Considere A_0 a fórmula obtida de A intercambiando os conectivos & e ∨ e substituindo cada variável proposicional pela sua negação. Então, A_0 é logicamente equivalente a $(\neg A)$.

Demonstração:

Hipótese indutiva: Para $n > 0$, suponha que toda fórmula restrita com um número menor ou igual a n conectivos possui a propriedade do resultado 1.

Tese: Queremos mostrar que toda fórmula A com $n + 1$ conectivos também possui a propriedade.

Como A tem $n + 1$ conectivos, ela deve ter uma das formas:

1. $(\neg B)$
2. $(B \vee C)$
3. $(B \,\&\, C)$

Resultado 1: Seja A uma fórmula restrita. Considere A_0 a fórmula obtida de A intercambiando os conectivos & e ∨ e substituindo cada variável proposicional pela sua negação. Então, A_0 é logicamente equivalente a $(\neg A)$.

Demonstração:

CASO 1: A tem a forma $(\neg B)$. Vou escrever isso assim: $A = (\neg B)$.

Se A tem $n+1$conectivos, então B possui n conectivos.

Logo, pela hipótese indutiva, B_0 é logicamente equivalente a $(\neg B)$.

Mas $A_0 = (\neg B)_0 = \neg(B_0)$

e como $(\neg B)$ é logicamente equivalente a B_0 , pelo resultado 4 –V4, se fizermos a substituição de B_0 por $\neg B$ em A_0 , a nova fórmula será equivalente à A_0 .

Assim, A_0 é logicamente equivalente a $\neg(\neg B) = \neg A$.

Demonstração:

CASO 2: A tem a forma $(B \lor C)$: $A = (B \lor C)$.

Se A tem $n + 1$ conectivos, então cada fórmula B e C individualmente possuem menos do que n conectivos.

Logo, pela hipótese indutiva, temos que:

- B_0 é logicamente equivalente a $(\neg B)$ e
- C_0 é logicamente equivalente a $(\neg C)$.

Mas $A_0 = (B \lor C)_0 = (B_0) \,\&\, (C_0)$,

e novamente pelo resultado 4-V4, fazendo a substituição de B_0 por $\neg B$ e de C_0 por $\neg C$ em A_0 , a fórmula obtida $(\neg B)$ & $(\neg C)$ é logicamente equivalente a A_0 .

Pelo resultado 3-V4, vimos que esta última fórmula é, por sua vez, equivalente a $\neg(B \lor C) = \neg A$.

Portanto, A_0 é logicamente equivalente a $\neg A$.

Resultado 1: Seja A uma fórmula restrita. Considere A_0 a fórmula obtida de A intercambiando os conectivos & e ∨ e substituindo cada variável proposicional pela sua negação. Então, A_0 é logicamente equivalente a $(\neg A)$.

Demonstração:

CASO 3: A tem a forma $(B \;\&\; C)$: $A = (B \;\&\; C)$.

Fica como exercício.■

Consequência direta 1: Se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são variáveis proposicionais, então $((\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \cdots \vee (\neg p_n))$ é logicamente equivalente a $(\neg(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n))$.

Notação: $\bigvee_{i=1}^{n}(\neg p_i)$ é logicamente equivalente a $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i)$.

Demonstração:

Basta tomar $A = (p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \ldots \,\&\, p_n)$ no resultado 1 anterior.■

Consequência direta 2 (dual):

$((\neg p_1) \,\&\, (\neg p_2) \,\&\, \ldots \,\&(\neg p_n))$ é logicamente equivalente a $(\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n))$.

Demonstração:

Basta tomar $A = (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ no resultado 1 anterior.■

Leis de De Morgan

Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ fórmulas quaisquer. Então,

$a)$ $\bigvee_{i=1}^{n}(\neg A_i)$ é logicamente equivalente a $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)$.

b) $\bigwedge_{i=1}^{n}(\neg A_i)$ é logicamente equivalente a $\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i)$.

A *demonstração* segue diretamente das consequências anteriores e do resultado 2-V4, que nos permite substituir, em tautologias, variáveis proposicionais por fórmulas.

05 *Lógica proposicional: Leis de De Morgan*■

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br